

文章编号: 1000-8055(2007)03-0431-08

一种考虑宽温宽频宽动态位移的 粘弹性本构模型

林 松¹, 高 庆¹, 李映辉¹, 杨显杰¹, 赵云峰²

(1. 西南交通大学 应用力学与工程系, 成都 610031;

2. 航天材料及工艺研究所, 北京 100076)

摘 要: 对硅橡胶粘弹性阻尼材料进行不同温度的频率扫描和动态位移扫描实验. 采用经典 Burgers 模型和 RT 模型对该材料频率响应曲线的预言能力进行评估; 基于 RT 模型, 本文提出改进的 M-RT 模型同时考虑了温度、频率和动态位移对材料动力学行为的影响, 通过与实验结果的比较分析, 表明该模型能很好地描述该材料在宽温、宽频和宽动态位移的动态本构行为.

关 键 词: 航空、航天推进系统; 硅橡胶; 粘弹性; 阻尼; 温度; 频率; 动态位移

中图分类号: V231.91; V255

文献标识码: A

A viscoelastic constitutive model under broad temperature frequency and dynamic displacement

LIN Song¹, GAO Qing¹, LI Ying-hui¹,
YANG Xian-jie¹, ZHAO Yun-feng²

(1. Department of Applied Mechanics and Engineering,
Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China;

2. Aerospace Research Institute of Materials and Processing Technology, Beijing 100076)

Abstract: The tests of frequency sweeping and dynamic displacement sweeping at different temperatures for the viscoelastic material silicon rubber were conducted. The predication capability of the frequency response behavior for Burgers model and RT model was evaluated. Based on RT model, M-RT model was proposed and considered the influence of temperature, frequency and dynamic displacement was considered. The comparison between the experimental and predicted results shows that the proposed model in the paper can predict the dynamic constitutive behavior very well under broad temperature, frequency and dynamic displacement.

Key words: aerospace propulsion system; silicon rubber; viscoelastic; damping; temperature; frequency; dynamic displacement

目前, 粘弹性阻尼材料广泛应用于航空航天工程的振动和噪声控制, 成为应用最为广泛的一种阻尼材料^[1]. 随着工作环境要求的提高, 工程设备向高速、高效和自动化发展, 粘弹性阻尼材料的工作温度、振动频率和动态位移的范围进一步拓

宽, 对该类材料进行宽温、宽频和宽动态位移的动态实验研究及其本构行为的描述是粘弹性阻尼材料研究的重要内容.

在粘弹性阻尼材料的动态本构描述中, 许多学者采用标准机械模型或分数导数模型分析材料

收稿日期: 2006-02-18; 修订日期: 2006-05-23

作者简介: 林松 (1979-), 男, 四川自贡人, 西南交通大学应用力学与工程系硕士生, 主要从事材料的本构关系及阻尼减振结构的优化设计的研究.

表 1 实验工况
Table 1 Testing conditions

材料		频率扫描实验 (频率范围: 10~ 420 Hz)	动态位移扫描实验 (动态位移范围: 1~ 200μm)
硅橡胶	动态位移/ μm	20	频率 f/Hz 10, 125
	温度 $t/^\circ\text{C}$	- 50, - 10, 25, 60, 100, 150	温度 $t/^\circ\text{C}$ - 10, 0, 25, 40, 60, 100, 150

的动态频率响应特性,引入 WLF 方程可考虑温度的影响^[2,5];Payne 等发现材料的动态行为具有动态位移相关性,即 Payne 效应^[6,7],常采用损伤模型、Kraus 模型等加以描述^[8];但同时考虑温度、频率和动态位移影响的粘弹性动态本构关系的研究很少.

本文对硅橡胶粘弹性阻尼材料进行了不同温度的频率扫描和动态位移扫描实验.采用经典 Burgers 模型和 RT 模型对该材料频率响应曲线的预言能力进行评估;基于 RT 模型,本文提出了改进的 M-RT 模型同时考虑了温度、频率和动态位移对材料动态行为的影响.通过与实验结果比较分析,表明该模型能很好地描述该材料在宽温、宽频和宽动态位移的动态本构行为.

1 动态实验

实验使用硅橡胶粘弹性阻尼材料,采用直径 $\Phi=10\text{ mm}$,高 $h=15\text{ mm}$ 的圆柱形试样.实验仪器是 METRAVIB VA4000 粘弹谱仪(温度范围为 $-150\sim 450\text{ }^\circ\text{C}$,频率范围是 $0.001\sim 1\,000\text{ Hz}$,动态位移可达到 $\pm 6\,000\text{ }\mu\text{m}$),激励模式为拉压模式.实验控制和数据采集都由计算机来实现.进行的实验工况如表 1.分别进行了频率扫描(在一定的动态位移和温度下测量不同频率时材料的动态阻尼特性)和动态位移扫描(在一定的频率和温度下测量不同动态位移时材料的动态阻尼特性)实验.

粘弹性材料的复模量 E 可用复数表示为:

$$E = E' + iE'' \tag{1}$$

材料的损耗因子 β 为:

$$\beta = E''/E' \tag{2}$$

公式(1)和(2)中, E' 为材料的贮能模量, E'' 为材料的耗能模量, β 为材料的损耗因子.通过频率扫描和动态位移扫描实验,可得到 E' , E'' 和 β 随频率、动态位移变化的规律.

2 经典粘弹性本构模型对硅橡胶材料动态力学行为描述的评估

粘弹性材料的复模量表示材料在动态交变载荷作用下的应力应变关系,是材料动态粘弹性的重要标志,因此该类材料的动态本构关系可用复模量来表征.本文采用了标准机械模型 Burgers 模型和分数导数模型 RT 模型对硅橡胶材料复模量预言能力进行评估.

2.1 Burgers 模型对硅橡胶材料复模量描述的评估

标准机械模型是基于弹簧和粘壶模型所建立的微分型本构关系,它形式简单、直观,并广泛应用于粘弹性材料的粘弹性行为分析^[12].

4 参数的 Burgers 模型由 Maxwell 模型和 Kelvin 模型串联组成^[2,3,8],见图 1 所示.图中 E_1 和 η_1 分别为 Kelvin 模型弹簧的弹性模量和粘壶的粘性系数, E_2 和 η_2 分别为 Maxwell 模型弹簧的弹性模量和粘壶的粘性系数.

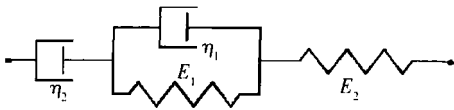


图 1 Burgers 模型图
Fig. 1 Burgers model

本构模型为:

$$\sigma + p_1 \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial t} + p_2 \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = q_1 \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + q_2 \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} \tag{3}$$

式中: q_1, q_2, p_1, p_2 为与 E_1, E_2, η_1, η_2 有关的材料常数,可由频率扫描实验数据进行拟合得到.

设粘弹性材料所受的动态应变 $\varepsilon(t)$ 为:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cdot e^{i\omega t} \tag{4}$$

式中: ω 为频率, ε_0 为应变幅值.

则稳定条件下的应力响应 $\sigma(t)$ 为:

表 2 模型参数值表
Table 2 Model parameters

温度/℃		- 50	- 10	25	60	100	150
Burgers 模型	p_1	0.058	0.037 7	0.035 46	0.104 38	0.097	0.09
	p_2	0.000 07	0.000 04	0.000 04	0.000 31	0.000 29	0.000 38
	q_1	8	2.076	0.823 48	1.097 33	0.91	0.6
	q_2	0.012	0.002 8	0.001 1	0.005 49	0.003 45	0.003 1
RT 模型	$\tilde{q}_0$	95.4	31	1.7	0.032	1	2
	$\tilde{q}_1$	17	10	12.9	9.25	4.18	2.3
	α_1	0.19	0.176	0.1	0.087	0.14	0.15

$\alpha(t) = \dot{\sigma} \cdot e^{i\omega t}$ (5)
式中: $\dot{\sigma}$ 是复应力幅。

将公式(4)和(5)代入本构公式(3), 则得:

$$[(1 + p_1 \cdot (i\omega) + p_2 \cdot (i\omega)^2) \cdot \dot{\sigma} \cdot e^{i\omega t} = [q_1 \cdot (i\omega) + q_2 \cdot (i\omega)^2] \cdot \mathfrak{E} \cdot e^{i\omega t}$$
 (6)

简化公式(6), 可得:

$$\dot{\sigma} = \frac{q_1 \cdot (i\omega) + q_2 \cdot (i\omega)^2}{1 + p_1 \cdot (i\omega) + p_2 \cdot (i\omega)^2} \cdot \mathfrak{E} \quad (7)$$

将公式(7)代入公式(5), 则得:

$$\alpha(t) = \frac{q_1 \cdot (i\omega) + q_2 \cdot (i\omega)^2}{1 + p_1 \cdot (i\omega) + p_2 \cdot (i\omega)^2} \cdot \mathfrak{E} \cdot e^{i\omega t} = \frac{q_1 \cdot (i\omega) + q_2 \cdot (i\omega)^2}{1 + p_1 \cdot (i\omega) + p_2 \cdot (i\omega)^2} \cdot \mathfrak{E}(t) \quad (8)$$

复模量表示为:

$$E(i\omega) = E'(\omega) + iE''(\omega) = \frac{\alpha(t)}{\mathfrak{E}(t)} = \frac{q_1 \cdot (i\omega) + q_2 \cdot (i\omega)^2}{1 + p_1 \cdot (i\omega) + p_2 \cdot (i\omega)^2} \quad (9)$$

根据公式(2)和(9), 储能模量 E' 、耗能模量 E'' 和材料的损耗因子 β 可分别表示为:

$$E'(\omega) = \frac{p_1 q_1 \omega^2 - q_2 \omega^2 (1 - p_2 \omega^2)}{p_1^2 \omega^2 + (1 - p_2 \omega^2)^2} \quad (10)$$

$$E''(\omega) = \frac{p_1 q_1 \omega^3 + q_1 \omega (1 - p_2 \omega^2)}{p_1^2 \omega^2 + (1 - p_2 \omega^2)^2} \quad (11)$$

$$\beta(\omega) = \frac{p_1 q_2 \omega^2 + q_1 (1 - p_2 \omega^2)}{p_1 q_1 \omega - q_2 \omega (1 - p_2 \omega^2)} \quad (12)$$

将硅橡胶材料在不同温度 t 的频率扫描实验数据分别代入 Burgers 模型 E' 、 E'' 和 β 的公式(10)~(12)中, 采用非线性拟合方法, 确定出的模型参数 p_1 、 p_2 、 q_1 和 q_2 列于表 2 中, 模型对 E' 、 E'' 和 β 的预言曲线与相应的实验曲线比较见图 2 所示。

由图 2 可见, Burgers 模型能较准确地描述材料储能模量 E' 随频率的变化规律, 但对材料耗

能模量 E'' 和材料损耗因子 β 来说, 模型对它们的预言曲线与相应的实验曲线的变化趋势相反, 误差很大。这说明 Burgers 模型不适宜用来描述硅橡胶材料复模量的频率响应特性。

2.2 RT 模型对硅橡胶材料复模量描述的评估

基于标准机械模型, Gemant 首先提出了分数导数模型, 该类模型用 Abel 体取代了标准机械模型中的粘壶, 能描述粘弹性材料在较大频率范围内的动态力学特性^[9, 10]。

3 参数的分数导数模型 RT 模型的本构关系为^[11]:

$$\alpha(t) = \tilde{q}_0 \cdot \mathfrak{E}(t) + \tilde{q}_1 \cdot D^{\alpha_1} \mathfrak{E}(t) \quad (13)$$

式中, $\tilde{q}_0$ 和 $\tilde{q}_1$ 为材料常数, α_1 为分数导数的阶次, $0 < \alpha_1 < 1$, D^{α_1} 为分数导数算子, 可表示为:

$$D^{\alpha_1} \mathfrak{E}(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha_1)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\mathfrak{E}(\tau - \tau)}{\tau^{\alpha_1}} d\tau \quad (14)$$

式中: Γ 为伽玛函数。

与 Burgers 模型类似的推导, RT 模型的储能模量 E' 、耗能模量 E'' 和材料损耗因子 β 可分别表示为:

$$E'(\omega) = \tilde{q}_0 + \tilde{q}_1 \cdot \omega^{\alpha_1} \cdot \cos(\pi\alpha_1/2) \quad (15)$$

$$E''(\omega) = \tilde{q}_1 \cdot \omega^{\alpha_1} \cdot \sin(\pi\alpha_1/2) \quad (16)$$

$$\beta(\omega) = \frac{\tilde{q}_1 \cdot \omega^{\alpha_1} \cdot \sin(\pi\alpha_1/2)}{\tilde{q}_0 + \tilde{q}_1 \cdot \omega^{\alpha_1} \cdot \cos(\pi\alpha_1/2)} \quad (17)$$

将硅橡胶材料在不同温度 t 的频率扫描实验数据分别代入 RT 模型的 E' 、 E'' 和 β 公式(15)~(17)中, 采用非线性拟合方法, 确定出的模型参数 $\tilde{q}_0$ 、 $\tilde{q}_1$ 、 α_1 列于表 2 中, 模型对 E' 、 E'' 和 β 的预言曲线与相应的实验曲线比较见图 3 所示。

由图 3 可见, 与 4 参数的 Burgers 模型相比,

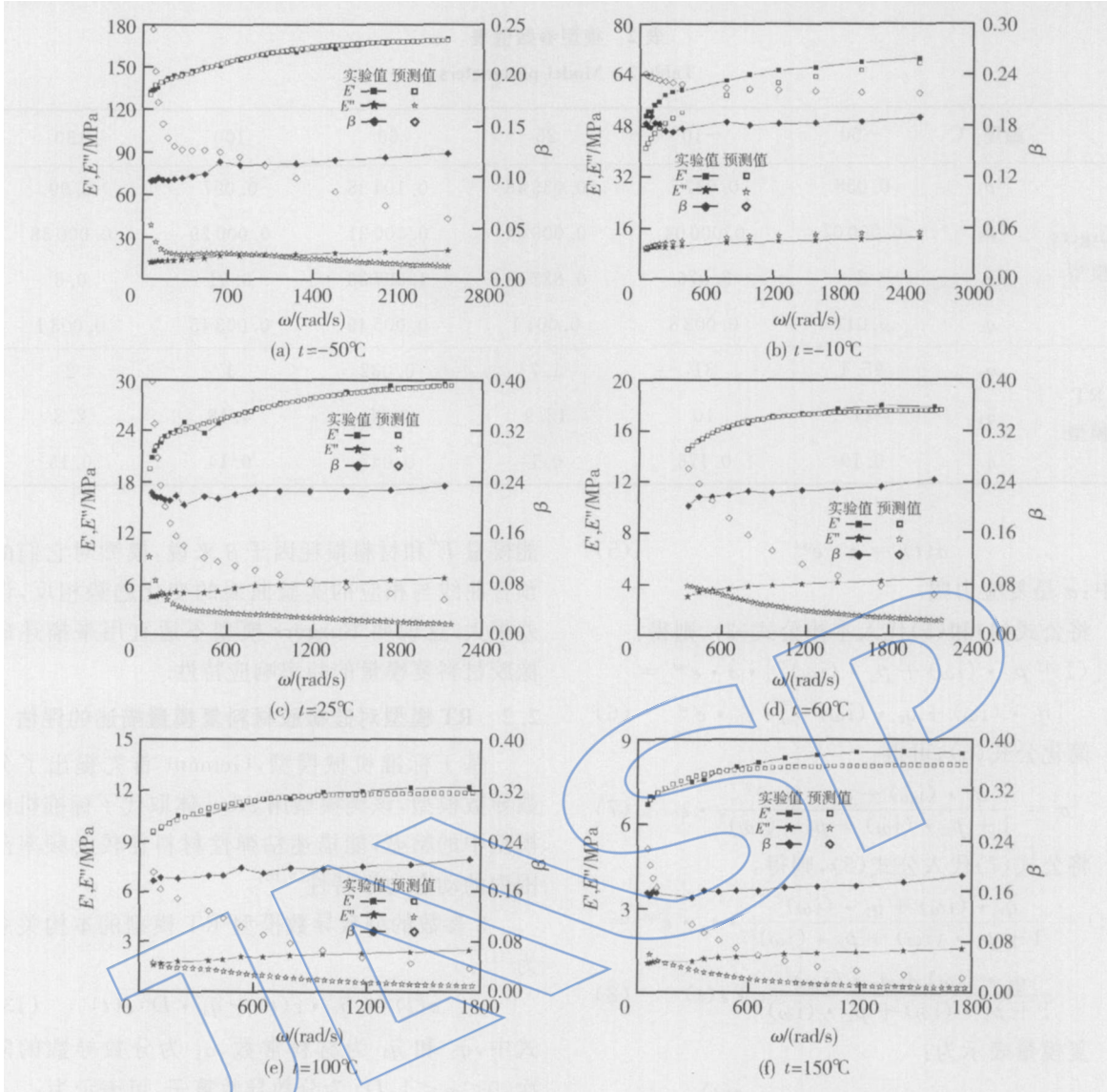


图 2 不同温度下复模量的频率扫描实验与 Burgers 模型预言的比较
Fig. 2 Complex modulus comparison between frequency sweeping test and prediction of the Burgers model under different temperatures

3 参数的 RT 模型能较准确描述硅橡胶材料的 E' 、 E'' 、 β 随频率的变化趋势,表明该模型可用来表征硅橡胶材料复模量的频率响应特性。

3 同时考虑宽温、宽频和宽动态位移的动态本构关系

粘弹性材料的动态粘弹性能明显地依赖于温度 t 、频率 ω 和动态位移 D , 目前常用的标准机械模型和分数导数模型的储能模量 E' 、耗能模量 E'' 和材料损耗因子 β 只计入了频率的影响, 而没有考虑温度、动态位移的影响。为进一步满足工程结构在复杂环境和复杂条件下能正常使用, 同时考虑温度、频率和动态位移影响的本构关系是全面研究此类材料动态力学的重要方面。

对硅橡胶粘弹性材料, 通过 Burgers 模型和 RT 模型对其复模量频率响应曲线的预言评估可知, RT 模型较 Burgers 模型更能全面地描述材料的频率响应特性。因此本文以 RT 模型为基础, 采用硅橡胶材料宽温、宽频、宽动态位移的实验数据, 同时考虑温度、频率、动态位移对储能模量 E' 、耗能模量 E'' 和材料损耗因子 β 的影响, 得到修正改进的 RT 模型(M-RT 模型)。

由于 M-RT 模型要同时考虑温度 t 、频率 ω 和动态位移 D 的影响, 所以公式(15)~(17)可写为:

$$E'(T, \omega, D) = \tilde{q}_0(T, D) + \tilde{q}_1(T, D) \cdot \omega^{\beta_1(T, D)} \cdot \cos[\pi\alpha(T, D)/2] \quad (18)$$

$$E''(T, \omega, D) = \tilde{q}_1(T, D) \cdot \omega^{\beta_1(T, D)} \cdot \sin[\pi\alpha(T, D)/2] \quad (19)$$

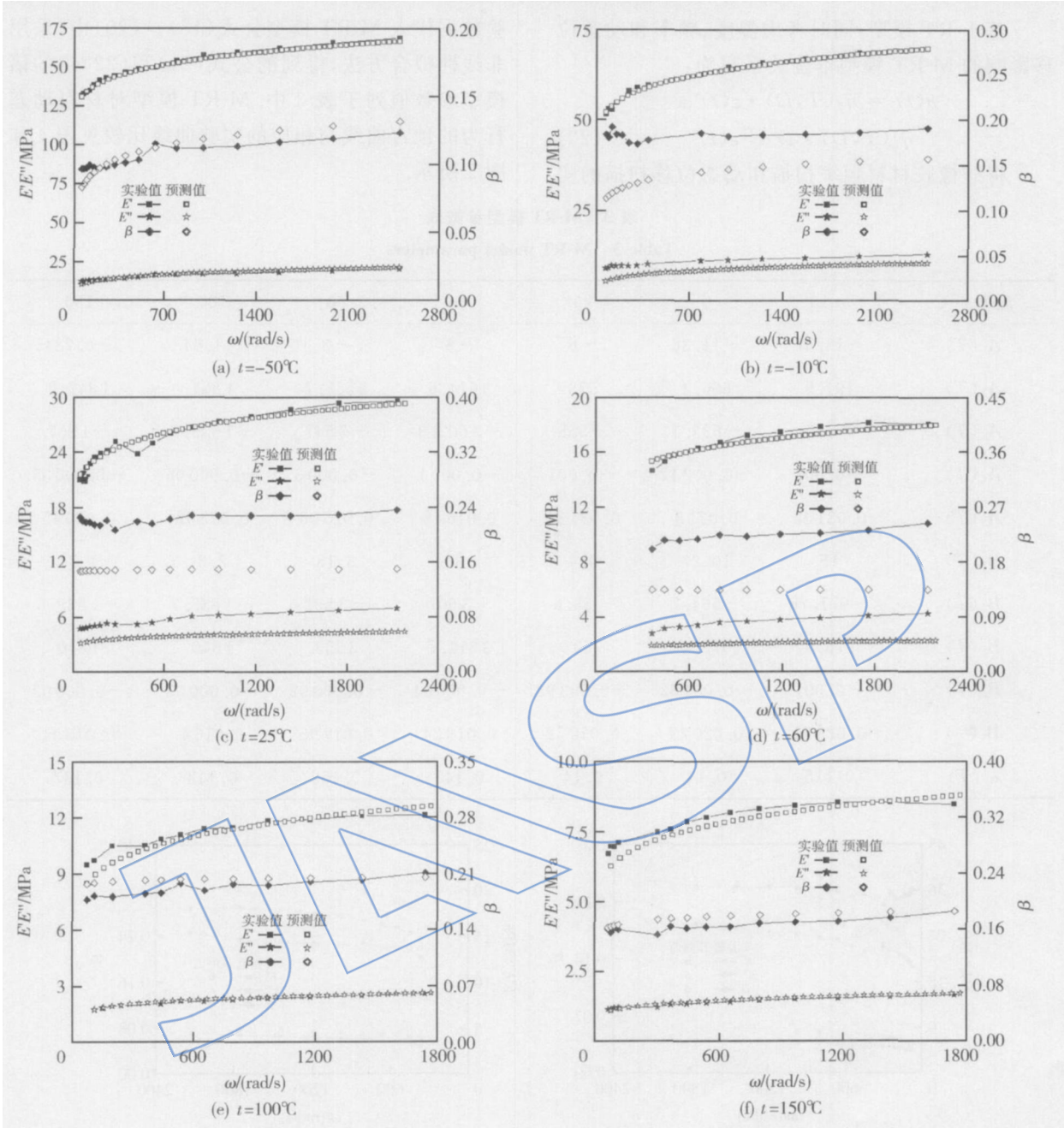


图 3 不同温度下复模量的频率扫描实验与 RT 模型预言的比较

Fig. 3 Complex modulus comparison between frequency sweeping test and prediction of the RT model under different temperatures

$$\begin{aligned} \Re(T, \omega, D) = & \frac{\tilde{q}_1(T, D) \cdot \omega^{\beta_1(T, D)} \sin[\pi \alpha(T, D)/2]}{\tilde{q}_0(T, D) + \tilde{q}_1(T, D) \cdot \omega^{\beta_1(T, D)} \cdot \cos[\pi \alpha(T, D)/2]} \end{aligned} \tag{20}$$

根据不同温度下频率扫描实验和动态位移扫描实验结果发现, 硅橡胶材料的复模量都受温度和动态位移的影响, 故 $\tilde{q}_0(T, D)$, $\tilde{q}_1(T, D)$ 为:

$$\begin{aligned} \tilde{q}_0(T, D) = & A_1(T) + \{A_2(T) + A_3(A) \cdot \exp[-A_4(T) \cdot D]\} \cdot \exp[-A_5(T) \cdot D] \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \tilde{q}_1(T, D) = & B_1(T) + \{B_2(T) + B_3(T) \cdot \exp[-B_4(T) \cdot D]\} \cdot \exp[-B_5(T) \cdot D] \end{aligned} \tag{22}$$

但复模量对温度有较明显的依赖性, 对动态位移的依赖性相对较弱, 且随动态位移的增大其依赖性更趋减弱. 故为了简化计算, M -RT 模型中分数导数的阶次 设为只随温度变化的系数. 式中:

$A_1(T)$, $A_2(T)$, $A_3(T)$, $A_4(T)$, $A_5(T)$, $B_1(T)$, $B_2(T)$, $B_3(T)$, $B_4(T)$ 和 $B_5(T)$ 是随温度变化的模型参数.

基于 RT 模型,同时考虑温度、频率和动态位移影响的 M-RT 模型本构关系写为:

$$\sigma(t) = \tilde{q}_0(T, D) \cdot \varepsilon(t) + \tilde{q}_1(T, D) \cdot D^{\alpha_1(T)} \dot{\varepsilon}(t) \quad (23)$$

将硅橡胶材料频率扫描和动态位移扫描的实

验数据代入 M-RT 模型公式(18)~(20)中,采用非线性拟合方法,得到的公式(21)和(22)中的诸模型参数值列于表 3 中. M-RT 模型对材料动态行为的预言曲线与相应的实验曲线比较见图 4 和图 5 所示.

表 3 M-RT 模型参数表
Table 3 M-RT model parameters

温度 $t/^{\circ}\text{C}$	- 10	0	25	40	60	100	150
$A_1(T)$	- 18. 57	- 11. 36	- 6	- 3	- 3	- 1. 64	- 0. 734
$A_2(T)$	191. 5	656. 4	573	3 614. 6	3 558. 7	1 884	1 842. 6
$A_3(T)$	- 155	- 623. 3	- 555	- 3 602. 8	- 3 547	- 1 835. 7	- 1 837
$A_4(T)$	- 0. 008	- 0. 002 12	- 0. 001	- 0. 000 1	- 0. 000 5	- 0. 000 06	- 0. 000 05
$A_5(T)$	0. 031 32	0. 021 3	0. 024 31	0. 016 48	0. 025 06	0. 023 32	0. 020 45
$B_1(T)$	15	10. 27	5. 4	3	3. 18	2. 3	1. 74
$B_2(T)$	- 977. 76	- 564. 7	- 65. 6	- 3 607	- 3 552	- 1 839. 7	- 1 839. 6
$B_3(T)$	979. 9	573. 4	69	3 610. 7	3 553	1 840	1 840
$B_4(T)$	- 0. 001	- 0. 001 32	- 0. 003 98	- 0. 000 04	- 0. 000 02	- 0. 000 03	- 0. 000 02
$B_5(T)$	0. 028 51	0. 020 23	0. 022 72	0. 013 24	0. 017 95	0. 016 4	0. 013 94
$\alpha_1(T)$	0. 115	0. 11	0. 14	0. 145	0. 152	0. 148	0. 137

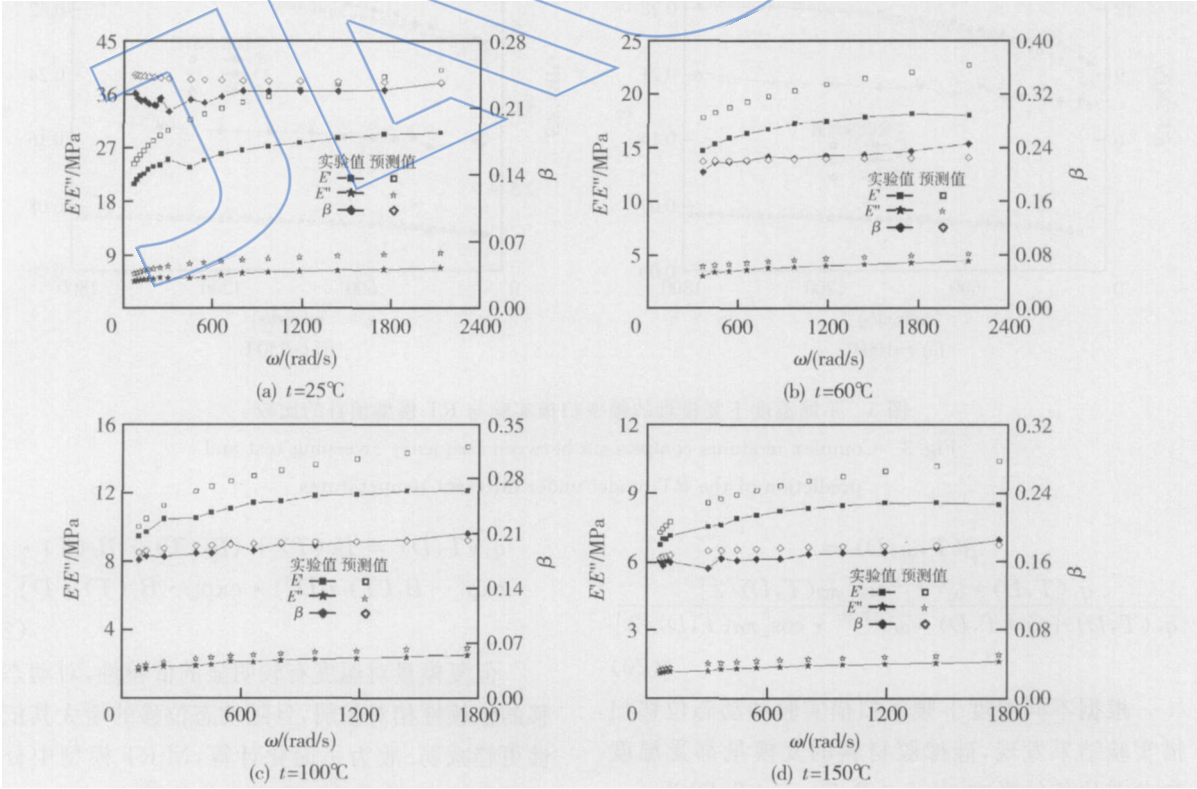


图 4 不同温度下复模量的频率扫描实验与 M-RT 模型预言的比较

Fig. 4 Complex modulus comparison between frequency sweeping test and prediction of the M-RT model under different temperatures

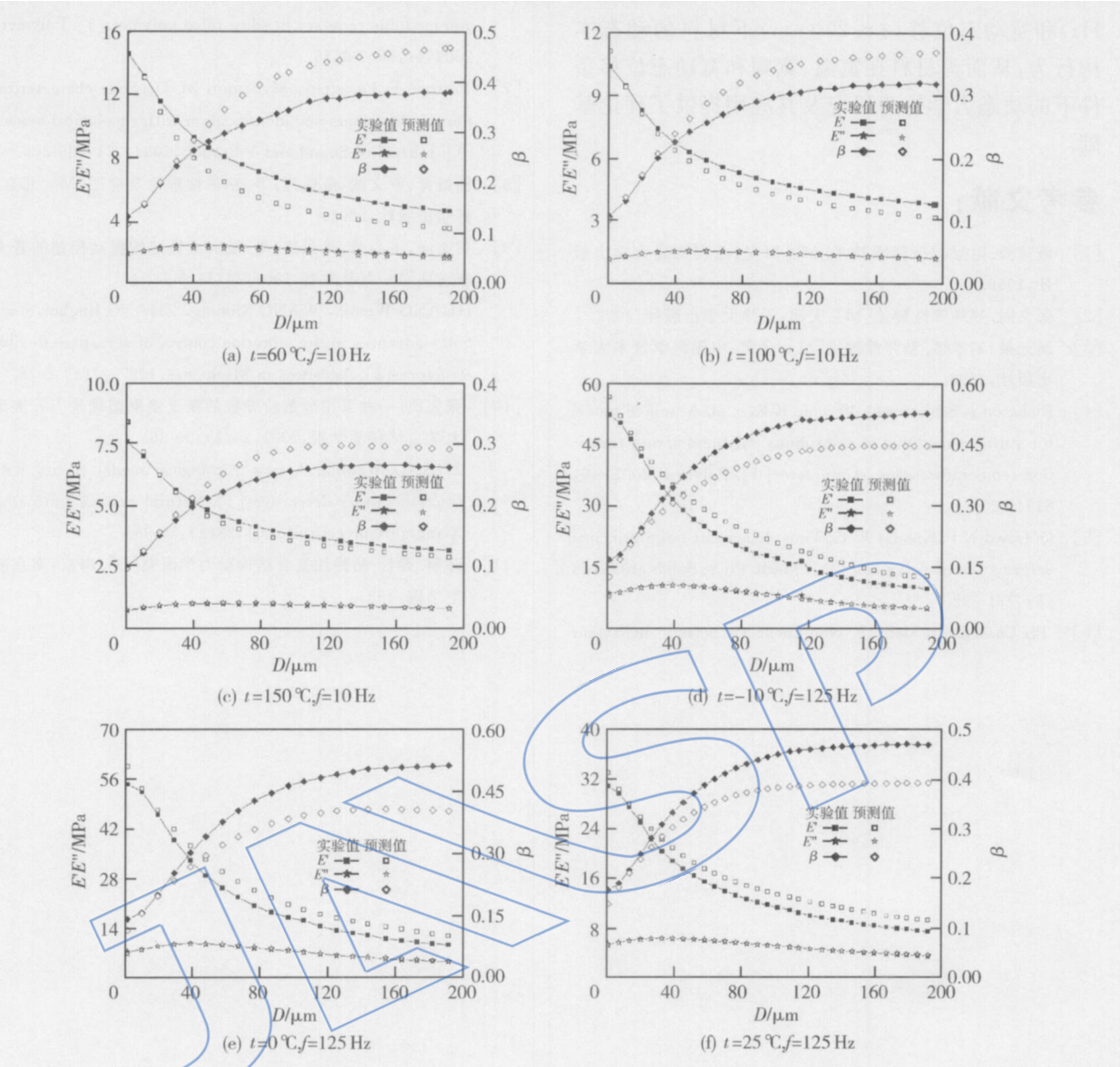


图 5 不同温度、不同频率下复模量的动态位移扫描实验与 M-RT 模型预言的比较
Fig. 5 Complex modulus comparison between dynamic displacement sweeping test and prediction of the M-RT model under different temperatures and different frequency

图 4 和图 5 分别给出了 M-RT 模型对硅橡胶材料复模量频率响应以及动态位移响应的预言模拟结果与相应实验结果的比较. 由图可见, 与 Burgers 模型、RT 模型相比, M-RT 模型不仅其描述精度提高了, 而且描述的范围拓宽了, 可同时描述在不同温度下频率响应特性和动态响应特性.

由于 M-RT 模型在宽温、宽频和宽动态位移时能较好表征材料复模量的频率响应特性和动态位移响应特性. 因此, 将该模型确定的模型参数 $\tilde{q}_0(T, D)$, $\tilde{q}_1(T, D)$ 和 $\alpha_1(T)$ 代入 M-RT 的本构方程(23)中, 能较合理地描述材料在宽温、宽频和宽动态位移下的动态本构行为.

4 结 论

通过对硅橡胶粘弹性阻尼材料的动态实验研究, 以及在宽温、宽频和宽动态位移条件下对材料的动态力学行为进行的复模量分析, 得到如下结论:

- (1) 基于频率扫描实验结果, 采用经典 Burgers 模型和 RT 模型对材料的 E' , E'' , β 随频率变化的曲线进行预言和比较, 表明 RT 模型能较全面地描述材料复模量的频率响应特性.
- (2) 基于 RT 模型, 本文提出了改进的 M-RT 模型, 与 Burgers 模型、RT 模型相比, 不仅其描述精度提高了, 而且描述的范围拓宽了. 该模型可较准确地表征在宽温(− 10~ 150 °C)、宽频(10~ 420

Hz)和宽动态位移(1~200 μm)下材料的动态本构行为,从而为材料在宽温、宽频和宽动态位移条件下的动态力学行为研究及其应用提供了理论基础.

参考文献:

- [1] 戴德沛. 阻尼减振降噪技术[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1986.
- [2] 张义同. 热粘弹性理论[M]. 天津: 天津大学出版社, 2002.
- [3] 周光泉, 刘孝敏. 粘弹性理论[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1996.
- [4] Richeton J, Schlatter G, Vecchio K S, et al. A unified model for stiffness modulus of amorphous polymers across transition temperatures and strain rates[J]. *Polymer*, 2005, 46: 8194-8201.
- [5] O'Dowd N P, Knauss W G. Time dependent large principal deformation of polymers[J]. *J. Mech. Phys. Solids*, 1995, 43(5): 771-792.
- [6] Ph Cassagnau, Melis F. Non linear viscoelastic behaviour and modulus recovery in silica filled polymers[J]. *Polymer*, 2003, 44: 6607-6615.
- [7] Petrone F, Lacagnina M, Scionti M. Dynamic characterization of elastomers and identification with rheological models[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 271: 339-363.
- [8] 杨挺青, 罗文波, 危银涛, 等. 粘弹性理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [9] 黄文虎, 王心清, 张景绘, 等. 航天柔性结构振动控制的若干新进展[J]. *力学进展*, 1997, 27(1): 5-18.
HUANG Wenhui, WANG Xinqing, ZHANG Jinghui, et al. Some advances in the vibration control of aerospace flexible structures[J]. *Advances in Mechanics*, 1997, 27(1): 5-18.
- [10] 张为民. 一种采用分数阶导数的新流变模型理论[J]. *湘潭大学自然科学学报*, 2001, 23(1): 30-36.
ZHANG Weimin. A new rheological modal theory with fractional order derivatives[J]. *Natural Science Journal of Xiangtan University*, 2001, 23(1): 30-36.
- [11] 陈前. 弹性-粘弹性复合结构动力学研究[D]. 南京: 南京航空学院, 1987.